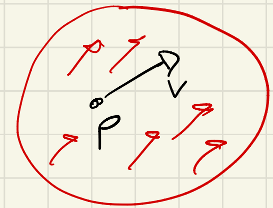
# Lezione 22

$M$ varietà liscia.

**Def:** Una CONNESSIONE per $M$ è una operazione che

dati $v \in T_pM$, $X \in \mathfrak{X}(U(p))$ $U(p)$




restituisce $\nabla_v X \in T_pM$ t.c.

DERIVATA COVARIANTE DI $X$ LUNGO $v$

1) Se $X \equiv Y$ in un intorno di $p$ allora

$$\nabla_v X = \nabla_v Y$$

2) $\nabla_v X$ è $\mathbb{R}$-lineare sia rispetto a $X$ che a $v$

$$\nabla_{\lambda v + \mu w} X = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_w X \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\nabla_v (\lambda X + \mu Y) = \lambda \nabla_v X + \mu \nabla_v Y$$

3) Regola di Leibnitz

$$\nabla_v (f \cdot X) = v(f) X(p) + f(p) \cdot \nabla_v X$$

4) $\nabla$ sia liscio in $p$, cioè:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(U(p)) \qquad \nabla_X Y (q) = \nabla_{X(q)} Y \quad \in \mathfrak{X}(U(p))$$

In carte:

$(M, \nabla)$

$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$ carte

$\nabla \dashrightarrow \nabla$

$\varphi : M \to N$ diffeo

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ \vdots & & \vdots \\ \nabla & \overset{\varphi_*}{\dashrightarrow} & \nabla' \end{array}$$

$$\nabla'_v (X) := \varphi_* \left( \nabla_{\varphi_*^{-1}(v)} \left( \varphi_*^{-1}(X) \right) \right)$$

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\Gamma_{ij}^k$ = SIMBOLI DI CHRISTOFFEL $\quad \Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(V)$ sono $n^3$

determinano $\nabla$

$$\nabla_v X = v^i \nabla_{e_i} X = v^i \nabla_{e_i}(X^j e_j)$$

$$= v^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \cdot e_j + v^i X^j \nabla_{e_i} e_j$$

$$= v^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} e_j + v^i X^j \Gamma^k_{ij} e_k$$

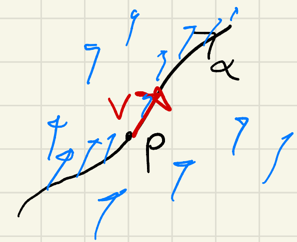
DERIVATA DIREZIONALE DI $X$ LUNGO $v$ $= v^i \dfrac{\partial X}{\partial x_j}$ + DIP. LINEARMENTE DA $V$ E DA $X(p)$

<u>Oss</u>: $\Gamma^k_{ij}$ cambiano male se cambiate carta

<u>Oss</u>: In $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{$connessioni su $V \subseteq \mathbb{R}\} \longleftrightarrow \{\Gamma^k_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(V)\}$

$(M, \nabla)$

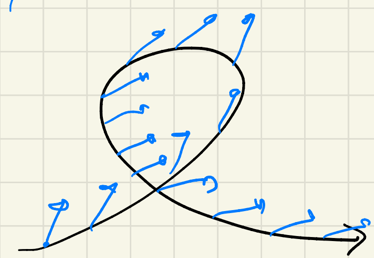
$$\nabla_v X = v^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} e_j + v^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k$$




<u>Oss</u>: $\alpha$ curva t.c. $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$

$\nabla_v X$ dipende soltanto da $X|_\alpha$

È vero perché è vero in carte.



<u>Def</u>: $\alpha : I \to M$ curva

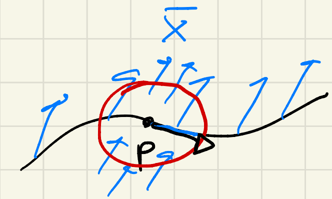
Un CAMPO VETTORIALE su $\alpha$ è

$$X : I \to TM \quad \text{t.c.} \quad X(t) \in T_{\alpha(t)}M$$

Se $\alpha$ embedding, dato $X$ campo su $\alpha$ posso definire

$D_t X$ campo su $\alpha$ (la DERIVATA di $X$) così

$p = \alpha(t) \qquad D_t X(t) = \nabla_{\alpha'(t)} \overline{X}$



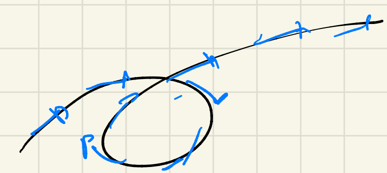
non dipende da estensione $\overline{X}$

Se $\alpha$ immersione, loc. è embedding $\Rightarrow$ la definizione di prima funziona.

Prop: $\exists!$ modo di associare a $X$ campo su $\alpha$ qualsiasi la sua derivata $D_t X$ t.c. soddisfi assiomi naturali:

Esempio: $\alpha : I \to M$ ha CAMPO TANGENTE $X(t) = \alpha'(t)$

$X : I \to TM \qquad X(t) \in T_{\alpha(t)} M$

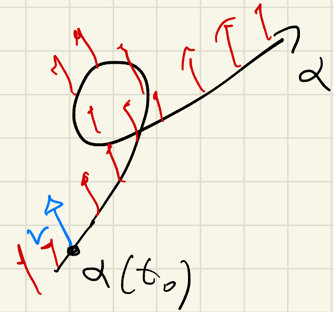


# TRASPORTO PARALLELO

$(M, \nabla)$ $\quad \alpha : I \to M$

**Def:** Un campo $X$ su $\alpha$ è PARALLELO se $D_t X \equiv 0$

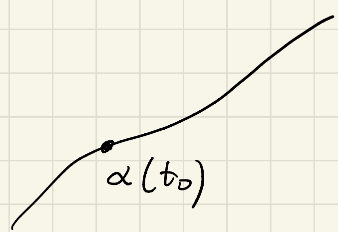
**Prop;** Data $\alpha : I \to M$, $t_0 \in I$,
$v \in T_{\alpha(t_0)} M$
$\exists!$ campo $X$ su $\alpha$ parallelo con $X(t_0) = v$




**dim:** Basta vederlo in carte

$$v^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} e_j + v^i X^j \Gamma_{ij}^k e_k = \nabla_v X$$

COPIA E INCOLLA




Equazione per $D_t X$

$$D_t X = \underbrace{\alpha'(t)^i \frac{\partial X}{\partial x_i}(\alpha(t)) + \alpha'(t)^i X^j(\alpha(t))\,\Gamma_{ij}^k(\alpha(t))\, e_k}_{\star}$$

Cerco $X : I \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\boxed{\star = 0}$ eq. diff. lineare del I ordine (a coeff. variabili)

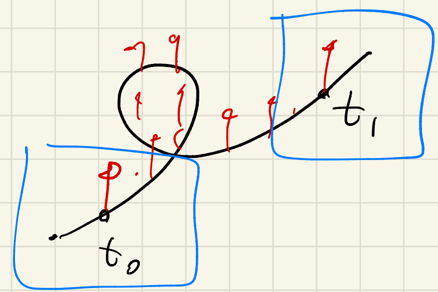
Se impongo $X(t_0) = v$ allora $\exists!$ soluzione $X$ $\exists$ su tutto $I$

Def: Data $\alpha : I \to M$, $t_0, t_1 \in I$

$$\Gamma(\alpha)_{t_0}^{t_1} : T_{\alpha(t_0)}M \to T_{\alpha(t_1)}M$$

$$v \longmapsto X(t_1)$$

$X$ che estende $v$

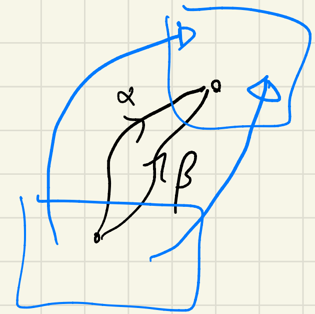


**Prop:** $\Gamma(\alpha)_{t_0}^{t_1}$ è ISOMORFISMO.

**dim:**
- è lineare
- $\Gamma(\alpha)_{t_1}^{t_0} \circ \Gamma(\alpha)_{t_0}^{t_1} = id$

$$\Gamma(\alpha)_{t_0}^{t_2} = \Gamma(\alpha)_{t_1}^{t_2} \circ \Gamma(\alpha)_{t_0}^{t_1}$$

**Oss:** Tutto dipende molto da $\alpha$




$\nabla$ DERIVATA DI CAMPI $\longrightarrow$ TRASPORTO PARALLELO

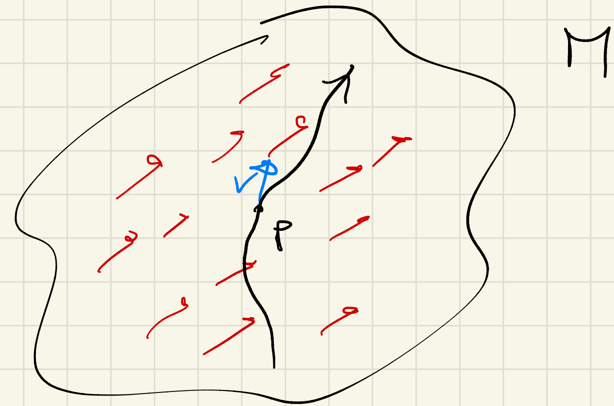
$\swarrow$

DERIVATA DI QUALSIASI CAMPO TENSORIALE

$(M, \nabla)$

# DERIVATA DI CAMPI TENSORIALI

$T \in \Gamma \mathcal{T}^k_h(M)$




Voglio definire $\nabla_v T \in \mathcal{T}^k_h(T_p M)$

Prendo $\alpha$ con $\alpha(0) = p$

$\alpha'(0) = v$

- Uso $\alpha$ per identificare tutti i $\mathcal{T}^k_h(T_q M)$ per $q = \alpha(t)$

$\Rightarrow \quad T(\alpha(t)) \in \mathcal{T}^k_h T_{\alpha(t)} M = \mathcal{T}^k_h T_p M$

$$\nabla_v T = \frac{d}{dt} T(\alpha(t)) \Big|_{t=0}$$

Prop: In coordinate viene così (in particolare non dipende da $\alpha$)

$$T^{i_1 - i_h}_{j_1 - j_k} \qquad \nabla_v T^{ij}_k = \frac{\partial T^{ij}_k}{\partial v} + v^e T^{mj}_k \Gamma^h_{em} e_h$$

$$+ v^e T^{im}_k \Gamma^h_{em} e_h$$

$$\Gamma^i_{jk} e_i = \nabla_j e_k \qquad v^e \frac{\partial T^{ij}_k}{\partial x^e} \qquad - v^e T^{ij}_m \Gamma^m \, e$$

$$\nabla g_{ij}$$